Imagen de $U(\mathfrak{g})^K$ por el homomorfismo de Lepowsky, descomposición LU del sistema lineal no conmutativo que la describe y polinomios de Jacobi

Sea G un grupo de Lie semisimple no compacto y sea K un subgrupo maximal compacto de G. Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{k}$ a las complexificaciones de las álgebras de Lie de G y K respectivamente. El homomorfismo de Lepowsky es la proyección

$$P : U(\mathfrak{g})^K \to U(\mathfrak{k})^M \otimes U(\mathfrak{a})$$

inducida por una descomposición de Iwasawa $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ (M es el cenrtralizador de $\mathfrak{a}$ en K). Se sabe que P es inyectivo.

Un resultado de J. Tirao establece que los elementos $b = P(u)$, con $u \in U(\mathfrak{g})^K$, al ser pensados como polinomios con coeficientes en $U(\mathfrak{k})^M$ satisfacen ciertas ecuaciones lineales en $U(\mathfrak{k})$ del tipo

$$E^n b(n) = b(-n)E^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

donde E es un elemento fijo de $U(\mathfrak{k})$. Más aún, para grupos de rango uno, estas ecuaciones lineales no conmutativas caracterizan la imagen de P.

En esta charla presentaremos algunas propiedades del sistema (1) que hemos obtenido recientemente. Primero mostraremos que (1) admite un proceso de eliminación gaussiana que conduce a su descomposición LU. Como resultado, las entradas matriciales de los factores L y U quedan expresados como polinomios de Jacobi formalmente evaluados en $\frac{L_E}{R_E}$, donde L_E y R_E son las multiplicaciones a izquierda y derecha por E. Segundo, mostraremos que, bajo ciertas circunstancias especiales, ser solución del sistema (1) es equivalente a ser invariante por un grupo finito.