

PRÁCTICO 4,5

1. Sean X, Y compactos T_2 , $Z T_2$, $f : X \rightarrow Z$, $g : Y \rightarrow Z$ continuas, $D = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$. Probar que D es compacto. Dar ejemplos con D no compacto (e hipótesis más débiles).
2. Sean X, Y espacios topológicos, $\mathcal{R} \subset X \times Y$ cerrado. Probar que si $A \subset X$ es compacto, entonces $\mathcal{R}(A) := \{y \in Y : \exists x \in X \text{ tal que } (x, y) \in \mathcal{R}\}$ es cerrado en Y .
3. Deducir del ejercicio anterior que si Y es compacto T_2 , entonces $f : X \rightarrow Y$ es continua sii su gráfico es cerrado en $X \times Y$.
4. Si X es un espacio métrico, se define el diámetro de $A \subset X$ como $\text{diam } A = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$. Supongamos que X es compacto y \mathcal{U} es un cubrimiento abierto de X . Entonces existe $r > 0$ tal que todo subconjunto de diámetro $< r$ está contenido en algún $U \in \mathcal{U}$.
5. Sean X un espacio pseudométrico, $A, B \subset X$ cerrados disjuntos. Definir explícitamente una función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(A) = 0$, $f(B) = 1$.
6. Sean X un espacio topológico, $A \subset X$. Se dice que A es *nunca denso* sii $\overline{A}^\circ = \emptyset$.
 - (a) A es nunca denso sii $(X - A)^\circ$ es denso en X .
 - (b) Si A es abierto o cerrado, entonces $\text{Fr}(A)$ es nunca denso.
 - (c) Un subconjunto que es unión finita de nunca densos es nunca denso.
 - (d) Un subconjunto que es unión numerable de nunca densos se dice *magro*. Un subconjunto que es unión finita de magros es magros; un subconjunto de un magro es magro.
 - (e) Son equivalentes.
 - i. Toda intersección numerable de abiertos densos es densa en X .
 - ii. Toda unión numerable de cerrados magros tiene interior vacío.
 - iii. Ningún abierto no vacío es magro.
 - iv. Si A es magro, entonces $X - A$ es denso.
 Si X verifica estas condiciones, se dice un espacio de Baire.
 - (f) Si X es un espacio de Baire, entonces todo abierto no vacío es de Baire.
 - (g) Si cada $x \in X$ admite un entorno de Baire, entonces X es de Baire.
 - (h) Si X es un espacio de Baire y A es magro, entonces $X - A$ es de Baire.
 - (i) Si X es localmente compacto, entonces es de Baire.
 - (j) Si X es métrico completo, entonces es de Baire.

Sugerencia para los dos últimos puntos: Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una familia de abiertos densos y U es abierto no vacío, entonces definir una sucesión de abiertos no vacíos $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ con $U_1 = U$ y $\overline{U_{n+1}} \subset U_n \cap A_n$; luego ver que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i \neq \emptyset$.
7. Sean X, Y espacios conexos; sean $A \subsetneq X$, $B \subsetneq Y$. Probar que $X \times Y - (A \times B)$ es conexo.

8. Sea $(X_i, d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de espacios métricos; entonces la topología producto de $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ viene de la métrica $d((x_i), (y_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)}$.
9. Si $(X_i, d_i)_{i \in I}$ es una familia de espacios métricos, entonces la topología de $\prod_{i \in I} X_i$ viene de una métrica si y sólo si I es finito o numerable (Sugerencia: N_1).
10. Sea $X = \prod X_i$. Si una cantidad infinita de espacios coordenados son no compactos, entonces todo subconjunto compacto del producto tiene interior vacío.
11. Sea $X = \prod X_i$. Si X es localmente compacto, entonces cada X_i es localmente compacto y todos, salvo una cantidad finita, son compactos.
12. Sea X el espacio de funciones continuas y acotadas de \mathbb{R} en \mathbb{R} con la métrica del supremo. Sea $D = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \exists t \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = \text{sen}(x + t)\}$. Probar que D es compacto.