

TOPOLOGÍA - Primer cuatrimestre de 2008
Práctico 0

Sean A, B, C subconjuntos de un conjunto X . Demostrar las siguientes afirmaciones:

1. $A \subseteq B \iff A \cap B = A$.
2. $A \subseteq B \iff A \cup B = B$.
3. $A \subseteq B \implies B = A \cup (B \setminus A)$ y $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$.
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
6. $A \subseteq B \cap C \implies A \subseteq B \wedge A \subseteq C$.
7. $A \cup B \subseteq C \implies A \subseteq C \wedge B \subseteq C$.
8. $A \subseteq B \iff B^C \subseteq A^C$.
9. $A \setminus B = A \cap B^C$.
10. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
 $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ (Leyes de De Morgan)

11. Sea $f : X \rightarrow Y$, $A, B \subseteq X$ y $C, D \subseteq Y$. Probar:

- (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- (b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Además, f inyectiva $\implies f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
- (c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
- (d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Demostrar también:

- (e) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ (y se cumple la igualdad si f es inyectiva).
- (f) $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$ (y se cumple la igualdad si f es sobreyectiva).
- (g) $f^{-1}(C^C) = [f^{-1}(C)]^C$.
- (h) Si f es inyectiva entonces $f(A^C) \subseteq [f(A)]^C$.
- (i) Si f es sobreyectiva entonces $[f(A)]^C \subseteq f(A^C)$.

Además:

- (j) En todos los items donde probé alguna contención, busque ejemplos de funciones que muestren que a veces no se cumple la igualdad.

Finalmente:

- (k) f es inyectiva si y sólo si existe $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f = \text{id}_X$. ($\text{id}_X : X \rightarrow X$ es la función identidad de X , esto es, $\text{id}_X(x) = x \forall x \in X$).
- (l) f es sobreyectiva si y sólo si existe $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g = \text{id}_Y$.
- (m) **Corolario:** f es biyectiva si y sólo si existe $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f = \text{id}_X$ y $f \circ g = \text{id}_Y$

PRÁCTICO 1

Espacios métricos. Espacios topológicos. Subespacios.

1. Considerar en \mathbb{R}^n la métrica euclídeana. Probar que
 - $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es cerrado en \mathbb{R}^3 .
 - $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \in \mathbb{Z}\}^c$ es abierto en \mathbb{R}^3 .
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1, x \neq \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}\}$ es abierto en \mathbb{R}^2 .
 - Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces $\text{graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ es cerrado en \mathbb{R}^2 .

2. Sea $C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$. Probar que $d(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt$ es una métrica en $C[a, b]$. ¿Vale la misma afirmación si continuidad se reemplaza por integrabilidad?

3. Si (X, d) es un espacio métrico y $x_0 \in X$, muestre que la función $f : X \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{R}$ con la distancia euclídea, dada por $f(x) = d(x, x_0)$ es continua.

4. (a) Sea (E, d) un espacio métrico y sea $\emptyset \neq A \subseteq E$. Probar que $(A, d|_{A \times A})$ es un espacio métrico.
 (b) Sea d la métrica euclídea en \mathbb{R} .
 - i. $[0, 1)$ es abierto en $[0, 2]$ con la métrica restringida.
 - ii. Estudiar los abiertos de $(\mathbb{Z}, d|_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}})$.

5. Sea (X, d) un espacio métrico. Para cada $A \subseteq X$, no vacío, y cada $x \in X$ definimos $d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$. Probar que la función $\delta : X \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{R}$ con la distancia euclídea, definida por $\delta(x) = d(x, A)$ es continua.

6. En $X = C([0, 1])$ consideremos las métricas

$$d_1(f, g) = \max\{|f(t) - g(t)| : t \in [0, 1]\},$$

$$d_2(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt.$$
 - (a) Analizar la continuidad de $\text{id} : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$ y de $\text{id} : (X, d_2) \rightarrow (X, d_1)$.
 - (b) Analizar la continuidad de las funciones $f \mapsto f(1)$ y $f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$ para ambas métricas en X .

7. Hallar todas las topologías en $\{a, b\}$ y en $\{a, b, c\}$.

8. Probar que las siguientes son topologías en el conjunto X .
- $\tau = \{A \subseteq X : A^c \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$.
 - $\tau_{x_0} = \{A \subseteq X : x_0 \in A\} \cup \{\emptyset\}$, con $x_0 \in X$.
 - $\tau_{-x_0} = \{A \subseteq X : x_0 \notin A\} \cup \{X\}$, con $x_0 \in X$.
9. (a) Probar que las siguientes son topologías en \mathbb{R} .
- $\tau_1 = \{A \subseteq \mathbb{R} : \text{para cada } x \in A \exists b \in \mathbb{R} \text{ con } [x, b] \subseteq A\}$.
 - $\tau_2 = \{A \subseteq \mathbb{R} : \text{para cada } x \in A \exists b \in \mathbb{R} \text{ con } (b, x] \subseteq A\}$.
 - $\tau_3 = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.
 - $\tau_4 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.
- (b) Si en τ_3 y en τ_4 cambiamos la condición “ $a \in \mathbb{R}$ ” por “ $a \in \mathbb{Q}$ ”, ¿siguen siendo τ_3 y τ_4 topologías en \mathbb{R} ?
- (c) Verificar que $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ es una base de τ_1 . Mostrar que los elementos de esta base son abiertos y cerrados.
10. Sea $E_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}$ y sea $\tau = \{E_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}$.
- Probar que τ es una topología en \mathbb{N} .
 - Para $A = \{3, 4, 19\}$ dar A° y \bar{A} .
 - Determinar los conjuntos cerrados en (\mathbb{N}, τ) .
 - Determinar los conjuntos densos en (\mathbb{N}, τ) .
11. Probar que la proyección $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $p(x, y) = x$, es continua y abierta, pero no es cerrada.
12. Consideremos \mathbb{R}^2 con la métrica usual y sean $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{2^n} \text{ con } n \in \mathbb{N}, y \in [0, 1]\}$ y $B = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$.
- ¿Es A abierto o cerrado?
 - Dar \bar{A} y $\text{Fr}(A)$.
 - Dar \bar{B} .
13. Consideremos \mathbb{R} con la topología τ_2 del ejercicio 9.
- Probar que $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ es una base de τ_2 .
 - Sean $A = [1, 2]$, $B = \{0\}$, $C = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ y $D = [0, \infty)$. Dar A° , B^- , $\text{Fr}(A \cup B)$, D° , $\text{Fr}(D)$, D^- , C^- y C° .
 - Probar que si $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces $A - A'$ es numerable.
14. Consideremos las siguientes familias de subconjuntos de \mathbb{R}^2 .
- $S_1 = \{\text{semiplanos abiertos}\}$.
 - $S_2 = \{\text{rectas del plano}\}$.
 - $S_3 = \{\text{semiplanos abiertos determinados por rectas verticales u horizontales}\}$.

- $S_4 = \{\text{rectas paralelas a los ejes coordenados}\}$.

Sea τ_i la topología con subbase S_i .

(a) Describir τ_i y dar una base B_i para $i = 1, 2, 3, 4$.

(b) Consideremos a $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$). Describir las topologías relativas a \mathbb{R} de (\mathbb{R}^2, τ_3) y (\mathbb{R}^2, τ_4) .

15. Sea $X = F_1 \cup F_2$ con F_1 y F_2 cerrados en X . Sean $f_i : F_i \rightarrow \mathbb{R}$ continuas tales que $f_1|_{F_1 \cap F_2} = f_2|_{F_1 \cap F_2}$. Probar que la función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = f_i(x)$, si $x \in F_i$, es continua.
16. Sean $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ y $[0, 2\pi)$ con las topologías relativas de las usuales de \mathbb{R}^2 y de \mathbb{R} respectivamente. Probar que la función $f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1$, definida por $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ es biyectiva y continua, pero no es abierta ni cerrada y por lo tanto no es un homeomorfismo.