

PRÁCTICO 2

**Axiomas de separación y numerabilidad.
Conexidad y arco-conexidad.**

1. Sea T el conjunto de todos los triángulos equiláteros (incluido el interior) en \mathbb{R}^2 . Probar que T es base de entornos de una única topología y describirla.
2. Supongamos que \mathcal{B} es una base para una topología τ . Probar que si τ_1 es la topología generada por \mathcal{B} (vista como subbase), entonces $\tau_1 = \tau$.
3. Sean X e Y espacios topológicos y supongamos que Y es T_2 . Sean $f, g : X \rightarrow Y$ continuas. Probar que:
 - (a) $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X .
 - (b) Si f y g coinciden en un denso, entonces son iguales.
4. Dar ejemplos de un espacio topológico que no es T_0 y un espacio topológico que es T_0 pero no T_1 . Muestre que un espacio T_1 finito es discreto.
5. ¿Existe una distancia d en \mathbb{R} tal que la topología definida por d es la de los complementos finitos?
6. ¿Es todo espacio N_1 también N_2 ?
7. ¿Es todo espacio N_2 separable?
8. Demostrar que la topología τ_1 del Ejercicio 9 es N_1 y separable pero no N_2 .
9. Probar que (X, τ_{x_0}) es conexo.
10. Probar que \mathbb{R} con la topología de los intervalos semiabiertos $(a, b]$ no es conexo.
11. Probar que no existe ninguna función continua y suryectiva de \mathbb{R} en \mathbb{Q} .
12. Probar que $O(n)$ no es conexo.
13. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua y sean $x, y \in X$ tales que $f(x) < f(y)$. Probar que para cada $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < c < f(y)$ y para cada subconjunto conexo A de X que contiene a x e y , existe $z \in A$ tal que $f(z) = c$.
14. Sea $Y \subseteq M_n(\mathbb{R})$ un subconjunto conexo y sean $A, B \in Y$ tales que $\det(A) > 0$ y $\det(B) < 0$. Probar que existe $C \in Y$ con $\det(C) = 0$.
15. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continua. Probar que f tiene un punto fijo.
16. Sea X espacio topológico e $Y \subset X$ un subconjunto conexo. Pruebe que si Z es un subconjunto de X tal que $Y \subset Z \subset \overline{Y}$ entonces Z es conexo. En particular la clausura de un conexo es un subconjunto conexo.

17. Probar que los siguientes espacios, con las topologías usuales, no son homeomorfos dos a dos:

$$(0, 1); \quad [0, 1); \quad [0, 1]; \quad \mathbb{R}^2 - \{0\}.$$

18. Sean $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \times [0, 1]$, $B = (\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}) \times [0, 1]$ y $C = B \cup \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}$ con las topologías relativas de la usual de \mathbb{R}^2 .

- (a) Dar las componentes conexas de A , B y C .
- (b) Determinar si A , B y C son localmente conexos o arco-conexos.
- (c) ¿Existe $f : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$ continua tal que $f|_X = \text{id}$, para $X = A, B$ o C ?
19. Probar que si B es un subconjunto no vacío, abierto, cerrado y conexo de un espacio topológico X , entonces B es una componente conexa de X .
20. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Si C es un subespacio conexo de X tal que $C \cap A \neq \emptyset$ y $C \cap A^c \neq \emptyset$, entonces $C \cap \text{Fr}(A) \neq \emptyset$.
- ¿Por qué la terna $X = \mathbb{R}^3$, $A = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $C = \{(0, 0, z) : |z| \leq 1\}$ no es un contraejemplo del resultado anterior?

21. Verdadero o Falso.

- (a) El producto de espacios conexos es conexo.
- (b) El producto de espacios arco-conexos es arco-conexo.
- (c) La clausura de un arco-conexo es necesariamente arco-conexo.
- (d) $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ es arcoconexo en \mathbb{R}^2 .

PRÁCTICO 3

Compacidad.

1. (a) La unión de una familia finita de compactos es compacta.
 (b) Si X es T_2 , la intersección de una familia arbitraria de compactos es compacta.
 (c) La intersección de dos compactos no es necesariamente compacta.
2. (a) Todo subconjunto compacto y no vacío de \mathbb{R} tiene máximo y mínimo.
 (b) Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y X es compacto, entonces f tiene máximo y mínimo en X .
 (c) Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, X es compacto y $f > 0$, entonces existe un $c > 0$ tal que $f(x) \geq c$, para todo $x \in X$.
3. Sea (X, d) un espacio métrico. Para cada $A \subseteq X$, no vacío, y cada $x \in X$ definimos $d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$. Si $A, B \subseteq X$, definimos $d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$ Probar que:
 - (a) $\bar{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$.
 - (b) La función $\delta : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\delta(x) = d(x, A)$ es continua.
 - (c) Si $K \subseteq X$ es compacto y $x_0 \in X$, entonces existe $y_0 \in Y$ tal que $d(x_0, K) = d(x_0, y_0)$.
 - (d) Si K_1 y K_2 son 2 subconjuntos compactos de X , entonces existen $x_0 \in K_1$ e $y_0 \in K_2$ tales que $d(K_1, K_2) = d(x_0, y_0)$.
 - (e) Mostrar que el inciso anterior es falso si K_1 o K_2 no son compactos.
4. Una $f : (X, d) \rightarrow (X', d')$ se dice *uniformemente continua* si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$. Probar que si X es compacto y f es continua, entonces f es uniformemente continua.
5. Sea X un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una isometría.
 - (a) Probar que f es una biyección.
 - (b) ¿Qué pasa si X no es compacto?
6. Probar que todo subconjunto infinito de un compacto tiene al menos un punto de acumulación.
7. Sean $X = [0, 1]$ y $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Considerar en X la topología τ que tiene por base a los abiertos del subespacio $(0, 1]$ de \mathbb{R} y a los conjuntos $I_a = \{x \in X : x < a \text{ y } x \notin D\}$ con $0 < a < 1$. Probar que (X, τ) es T_2 y no es compacto.
8. Verdadero o falso.
 - (a) Sea (X, τ) un espacio topológico, compacto y T_2 . Entonces no existe ninguna topología τ' menos fina que τ tal que (X, τ') sea T_2 .
 - (b) Sea (X, τ) un espacio topológico, compacto y T_2 . Entonces no existe ninguna topología τ' más fina que τ tal que (X, τ') sea compacto.
 - (c) La clausura de un compacto es compacta.
 - (d) Sea X un espacio T_2 e Y un subespacio localmente compacto y denso. Entonces Y es abierto.

PRÁCTICO 4

Espacios producto.

1. Probar que las proyecciones de un espacio producto $\prod_{i \in I} X_i$ sobre cualquiera de sus espacios coordenados son funciones abiertas.
2. Sean $\{X_i\}_{i \in I}$ espacios topológicos, $A_i \subseteq X_i$ y $X = \prod_{i \in I} X_i$ con la topología producto.
 - (a) Estudiar las relación entre $\prod_i A_i^\circ$ y $(\prod_i A_i)^\circ$.
 - (b) Estudiar las relación entre $\prod_i A_i^-$ y $(\prod_i A_i)^-$.
 - (c) Probar que si $X = X_1 \times X_2$ y $A_i \subseteq X_i$, entonces $\text{Fr}(A_1 \times A_2) = (\text{Fr}(A_1) \times \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \times \text{Fr}(A_2))$.
3. Sea $I = I_1 \cup I_2$ con $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ y sean X_i , con $i \in I$, espacios topológicos. Probar que:
 - (a) $\prod_{i \in I} X_i \simeq (\prod_{j \in I_1} X_j) \times (\prod_{j \in I_2} X_j)$.
 - (b) Si $X_i \simeq Y_i$ para todo i , entonces $\prod_{i \in I} X_i \simeq \prod_{i \in I} Y_i$.
4. Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ continua. Probar que:
 - (a) X es T_2 sii $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ es cerrado en $X \times X$.
 - (b) Si Y es T_2 , entonces $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ es cerrado en $X \times Y$.
5. Sean $\{X_i\}_{i \in I}$ espacios topológicos. Probar que:
 - (a) $\prod_{i \in I} X_i$ es T_2 sii X_i es T_2 para todo i .
 - (b) $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ es N_1 (N_2) sii cada X_i es N_1 (N_2).
6. Sean X, Y y Z espacios topológicos. Una $f : X \times Y \rightarrow Z$ se dice *continua respecto de x* si para todo $y \in Y$ la función $f_y : X \rightarrow Z$ definida por $f_y(x) = f(x, y)$ es continua. La definición de continua respecto de y es análoga. Probar que si f es continua, entonces f es continua respecto de x y es continua respecto de y . Dar un ejemplo que muestre que la recíproca no vale.
7. Sea $X = \mathbb{R}^{[0,1]}$ con la topología producto de la usual de \mathbb{R} .
 - (a) Considerar $f \equiv 1$ y dar algunos entornos sub-básicos de f .
 - (b) Si $g = \cos(\pi x)$, dar 3 entornos de f que contengan a g y 3 entornos de f que no contengan a g .
 - (c) Mostrar que para todo entorno de f y para todo $N > 0$ hay una h en dicho entorno y un $x \in [0, 1]$ tal que $h(x) \geq N$.
 - (d) Mostrar que para todo entorno de f y para todo $N > 0$ hay una h en dicho entorno tal que $\int_0^1 h(x) \geq N$.
8. Sea $X = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{[0,1]}$. Comparar la topología relativa de la producto en X con las dadas por las distancias d_1 y d_2 (ver ejercicio 6, Práctico 1).
9. Verdadero o Falso.
 - (a) El producto de espacios conexos es conexo.
 - (b) El producto de espacios arco-conexos es arco-conexo.

PRÁCTICO 5

Espacios cocientes.

Nota: Los ejercicios con una \textcircled{R} se pueden dejar para un repaso.

1. En $X = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ definimos $x \sim y$ si y sólo si $\|x\| = \|y\|$.
 - a) Probar que la proyección canónica $p : X \rightarrow X/\sim$ es abierta y cerrada.
 - b) Probar que $X/\sim \simeq \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
2. Sean $\{X_i\}$ una familia de espacios topológicos y \sim_i relaciones de equivalencia abiertas en X_i . Definimos en el espacio producto la relación de equivalencia $(x_i) \sim (y_i)$ si y sólo si $x_i \sim_i y_i$. Probar que $(\prod_i X_i)/\sim$ es homeomorfo a $\prod_i (X_i/\sim_i)$.
3. Sea $X = \mathbb{R}^2$ con la topología usual, $A = \{(x,0) \in X : x \in \mathbb{R}\}$ y \sim la relación de equivalencia asociada a la partición de X formada por A y los subconjuntos $\{(x,y)\}$ tales que $y \neq 0$. Probar:
 - a) La proyección canónica $p : X \rightarrow X/\sim$ es cerrada pero no abierta.
 - b) Existen $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ numerables entornos de A en X/\sim tales que $\cap V_n = \{A\}$.
 - c) X/\sim no es N_1 .
 - d) Es $X/\sim T_2$?
 - e) Probar que para cada entero no negativo m la sucesión $\{(m, \frac{1}{n+1}) : n \in \mathbb{N}\}$ converge en el espacio cociente. Si $\{N_n\}$ es una subsucesión de \mathbb{N} entonces la sucesión $\{(n, \frac{1}{N_n+1}) : n \in \mathbb{N}\}$ no converge a A .
4. Sea $X = \mathbb{R} - \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, 1, -1\}$ y \sim la relación de equivalencia en X asociada a la partición cuyos elementos son $\mathbb{Z} - \{0\}$, $\{0\}$ y los conjuntos de la forma $\{x, \frac{1}{x}\}$ con $0 < |x| < 1$.
 - a) Probar que la proyección canónica no es abierta ni cerrada.
 - b) Probar que el gráfico de esta relación es cerrado pero el espacio cociente X/\sim no es T_2 .
5. \textcircled{R} Sean $I = [-1, 1]$, $X = I/\sim_1$, $Y = I/\sim_2$ donde \sim_1 identifica $\frac{1}{2}$ con 1 y \sim_2 identifica $-\frac{1}{2}$ con -1 y $\frac{1}{2}$ con 1. Probar que X no es homeomorfo a Y .
6. Sea \sim una relación de equivalencia en X , y sea $p : X \rightarrow X/\sim$ la proyección al cociente. Dado B un subconjunto de X llamamos *saturado de B* al conjunto $p^{-1}(p(B))$. Decimos que B es *saturado* si $B = p^{-1}(p(B))$.
 - a) Probar que A es abierto en X/\sim (resp. cerrado) si y sólo si $A = p(B)$ para algún B abierto (resp. cerrado) y saturado en X .
 - b) Probar que p es abierta (resp. cerrada) si y sólo si saturados de conjuntos abiertos (resp. cerrado) son abiertos (resp. cerrado).
7. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
 - a) Si X es un espacio T_2 entonces X/\sim es T_2 .
 - b) Si X/\sim es un espacio T_2 entonces X es T_2 .
 - c) Si X/\sim es conexo entonces X es conexo.

8. \textcircled{R} Sea $X = [0, 1]$ y sea \sim la relación que identifica el 0 con el 1. Probar que $[0, 1]/\sim$ es homeomorfo a S^1 .
9. \textcircled{R} Probar que el proyectivo complejo n -dimensional, $\mathbb{C}P^n$ es homeomorfo al cociente de S^{2n+1} por la relación de equivalencia: $x \sim y$ si existe $\lambda \in S^1$ tal que $x = \lambda y$. (Notar que $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$).
10. Probar que el toro n -dimensional es homeomorfo a $(S^1)^n = S^1 \times \dots \times S^1$.
11. Probar que el grupo $U(n)$ es homeomorfo a $S^1 \times SU(n)$. En particular $U(n)$ es conexo.
12. Si A es un subconjunto de X y \sim es una relación de equivalencia de X tal que toda clase de equivalencia corta a A , entonces la inclusión de A en X induce un homeomorfismo de A/\sim en X/\sim si el saturado en X de todo abierto (cerrado) de A es abierto (cerrado) en X .
13. \textcircled{R} La topología *Zariski* de \mathbb{R}^n , denotada por Zar , se define por: un subconjunto de \mathbb{R}^n es cerrado si y sólo si es el conjunto de ceros de algún polinomio en n variables $f(x_1, \dots, x_n)$. En tal caso es denotado por $V(f)$.
- (a) Probar que Zar es realmente una topología. ¿Es más o menos fina que la usual?
- (b) ¿Qué topología es para $n = 1$? (es decir en \mathbb{R}).
- (c) Dibujar los cerrados $V(f)$ en \mathbb{R}^2 para: $f(x, y) = xy$, $f(x, y) = xy - 1$, $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$; y en \mathbb{R}^3 para: $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$, $f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$, $f(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$.
- (d) ¿Es el subconjunto $\{re^{i\theta} : r = |\sin 2\theta|\}$ un cerrado Zariski de \mathbb{R}^2 ?
- (e) Decidir si la topología Zariski posee las siguientes propiedades: T_1 , T_2 , N_1 , conexo. ¿Es (\mathbb{R}^n, Zar) homeomorfo al producto $(\mathbb{R}, Zar) \times \dots \times (\mathbb{R}, Zar)$ (n veces)?
- (f) Hallar la clausura Zariski de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 :
- una recta menos un punto, una semirecta, un disco, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- (g) Probar que el conjunto $\{(x, e^x) : x \in \mathbb{R}\}$ es denso Zariski en \mathbb{R}^2 .
- (h) ¿Es todo polinomio $f : (\mathbb{R}^n, Zar) \rightarrow \mathbb{R}$ continuo?
- (i) ¿Es todo polinomio $f : (\mathbb{R}^n, Zar) \rightarrow (\mathbb{R}, Zar)$ continuo?

PRÁCTICO 6

Sucesiones. Espacios regulares y normales.

Nota: Los ejercicios con una \textcircled{R} se pueden dejar para un repaso.

- Sea \mathbb{R} con la topología de los complementos finitos.
 - Encuentre los límites de las siguientes sucesiones: $x_n = n, n \in \mathbb{N}$ y $x_n = 1$ si n impar, $x_n = n$ si n par.
 - Verdadero o Falso? " Toda sucesión convergente tiene límite único o infinitos límites".
- Sea X un conjunto, $x_0 \in X$ y consideremos la topología $\tau_{x_0} = \{A \subseteq X : x_0 \in A\} \cup \{\emptyset\}$. Describir las sucesiones convergentes en (X, τ_{x_0}) . ¿Existen sucesiones que convergen a más de un punto?
- \textcircled{R} Considerar (\mathbb{N}, τ) donde $\tau = \{\{k \in \mathbb{N} : k \leq n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$.
 - Dar varias sucesiones que converjan a 1.
 - ¿Cuáles son todas las sucesiones que convergen a 1?
 - ¿Cuáles son las sucesiones convergentes?
- Sea X un espacio topológico N_1 y $A \subseteq X$. Probar que:
 - X es T_2 sii toda sucesión en X converge a lo sumo a un punto.
 - $x \in X$ es un punto de acumulación de A sii existe una sucesión en $A - \{x\}$ que converge a x .
 - $x \in X$ es un punto de acumulación de una sucesión sii existe una subsucesión que converge a x .
- Probar que todo subconjunto infinito de un compacto tiene al menos un punto de acumulación.
- \textcircled{R} Sea X un espacio métrico. Si $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son sucesiones de Cauchy en X tal que $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ entonces decimos que $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son equivalentes. Sea Y el conjunto de clases de equivalencia $[\{x_n\}]$ de sucesiones de Cauchy $\{x_n\}$ en X . Damos a Y la métrica

$$d([\{x_n\}], [\{y_n\}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n).$$

- Mostrar que esta es una métrica en Y .
- Mostrar que la función $f : X \rightarrow Y$ dada por $x \mapsto [\{x\}]$ es un homeomorfismo isométrico sobre un subespacio denso de Y . (Isométrico significa que preserva la distancia.)
- Mostrar que Y es completo. (Se llama la "completación" de X .)
- Si $g : X \rightarrow Z$ es una isometría, y Z es completo, entonces mostrar que existe una única factorización $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z$ de g con h una isometría.

(e) Si $g(X)$, en la parte (d), es denso en Z entonces probar que h es sobre.

7. Muestre que un espacio Hausdorff es normal si y solo si para todo U abierto, C cerrado tal que $C \subset U$ existe un abierto V tal que $C \subset V \subset \bar{V} \subset U$.
8. Sea X normal y $f : X \rightarrow Y$ continua y sobre. Probar que si f es cerrada, entonces Y también es normal.
9. \textcircled{R} Sean $X = [0, 1]$ y $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Considerar en X la topología τ que tiene por base a los abiertos del subespacio $(0, 1]$ de \mathbb{R} y a los conjuntos $I_a = \{x \in X : x < a \text{ y } x \notin D\}$ con $0 < a < 1$. Probar que (X, τ) es T_2 y no es ni regular ni compacto.

PRÁCTICO 7

Nota: Los ejercicios con una \textcircled{R} se pueden dejar para un repaso.

1. Muestre que si X es completamente regular entonces X es regular y que si X es normal entonces X es completamente regular.
2. Probar que la imagen de un espacio localmente compacto por una función continua y abierta es localmente compacta. Mostrar que esto deja de cumplirse si la función no es abierta.
3. Sea X un espacio localmente compacto y T_2 , y sea X^+ la compactificación por un punto de X . Pruebe que la topología en X^+ es la única que hace de X^+ un espacio compacto y T_2 con X como subespacio.
4. Sean X, Y espacios localmente compactos y T_2 y $f : X \rightarrow Y$ continua. Entonces f es propia si y sólo si f se extiende a una función continua $f^+ : X^+ \rightarrow Y^+$ con $f^+(\infty_X) = \infty_Y$.
5. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función propia y X, Y son espacios localmente compactos y T_2 entonces f es cerrada.
6. \textcircled{R} Sea X normal, $F \subset X$ cerrado y $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Pruebe que existe $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in F$ y $\sup_{x \in F} f(x) = \sup_{x \in X} g(x)$, $\inf_{x \in F} f(x) = \inf_{x \in X} g(x)$.
7. \textcircled{R} Sea X completamente regular, $K \subset X$ compacto. Si U es un abierto tal que $K \subset U$, mostrar que existe $f : X \rightarrow I$ continua tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in K \\ 1, & \text{si } x \in X \setminus U. \end{cases}$$

8. Probar que *metrizable* es una propiedad topológica.
9. \textcircled{R} Sea $f : X \rightarrow Y$ continua. Si X es compacto y metrizable e Y es T_2 entonces $f(X)$ es metrizable.