

PRÁCTICO 1,5

**Nota:** Los ejercicios con una  $\textcircled{R}$  son más complicados.

1) Sean  $X$  un espacio topológico,  $A, B \subset X$ .

- (i) Probar que  $(\overline{A^c})^c = A^\circ$ .
- (ii) Se pueden construir a lo sumo 14 conjuntos a partir de  $A$  por complementos y clausuras sucesivas. además existe  $A \subset \mathbb{R}$  (con la topología usual) a partir del cual se pueden construir 14 conjuntos diferentes.
- (iii)  $\text{Fr } A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus A^\circ$ ;  $X \setminus \text{Fr } A = A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ$ .
- (iv)  $\overline{A} = A \cup \text{Fr } A$ ;  $A^\circ = A \setminus \text{Fr } A$ .
- (v) Un conjunto es cerrado si y sólo si contiene a su frontera. Un conjunto es abierto si y sólo si es disjunto con su frontera.
- (vi)  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ ,  $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$ . Mostrar que no siempre vale la igualdad.
- (vii) Si  $A$  es denso en  $X$  y  $B$  es abierto, entonces  $B \subseteq \overline{A \cap B}$ .
- (viii) La frontera de un conjunto contiene a la frontera de su interior. Comparar la frontera de  $A \cup B$  con las fronteras de  $A$  y  $B$ .
- (ix) La función característica de  $A$  es  $\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A \end{cases}$ . Describir la frontera de  $A$  mediante esta función.

2) Sean  $X$  un espacio topológico,  $A \subset X$ . Calcular la clausura, el interior, la frontera y los puntos de acumulación de  $A$ . (¡Dibujar!).

- (i)  $X = \mathbb{R}$  con la topología usual.  $A = \mathbb{N}; \mathbb{Z}; \mathbb{Q}; \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; [a, b]; (a, b); (a, b); \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}); \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}); \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$ .
- (ii)  $X = \mathbb{R}^2$  con la topología usual.  $A = \mathbb{N} \times \mathbb{Q}; \{(x, y) \in X : 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}; \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) : 0 \leq x \leq 4, -2x \leq y \leq x\}; \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} \times \mathbb{Q}; \{(x, y) \in X : 0 \leq x \leq 1, y = x \sin(\frac{1}{x})\}; \{(x, y) \in X : y = \frac{1}{x}\}; \{(x, y) \in X : y = x\}; X \setminus \{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x > 0\}$ ;
- (iii)  $X = \mathbb{R}^2$  con la topología que tiene como base los conjuntos de la forma  $[a, b) \times [c, d)$ .  $A$  como en (ii).
- (iv)  $\textcircled{R}$   $X = C([0, 1])$  con las topologías del Ejercicio 6, Práctica 1,  $A$  las funciones derivables.

3) ③ Sea  $X = \mathbb{R}$  con la topología usual. Sea  $T \subseteq \mathbb{R}$  con las siguientes propiedades:

$$a) 0 \in T; \quad b) x, y \in T \implies x + y \in T; \quad c) x \in T \implies -x \in T.$$

Probar que vale una y sólo una de las siguientes opciones:

(i) Existe  $\min\{t \in T : t > 0\}$ .      (ii)  $T$  es denso (es decir,  $\overline{T} = \mathbb{R}$ ).

4) Sean  $X$  un conjunto,  $A \subset X$ ,  $\tau$  una topología en  $X$ . Si  $\mathcal{F}$  es un subconjunto de  $\mathcal{P}(X)$ , entonces  $\mathcal{F}_A := \{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}$ , un subconjunto de  $\mathcal{P}(A)$ .

(i) Si  $\mathcal{B}$  una base de  $\tau$ , entonces  $\mathcal{B}_A$  una base de  $\tau_A$ .

(ii) Si  $\mathcal{S}$  una sub-base de  $\tau$ , entonces la topología generada por  $\mathcal{S}_A$  es  $\tau_A$ .

(iii) Si  $n < m$ ,  $X = \mathbb{R}^m$ ,  $\tau$  es la topología usual,  $A = \mathbb{R}^n \times 0$ , entonces  $\tau_A$  es la usual.

(iv) Calcular  $\tau_A$  si  $\tau$  es la topología discreta, o indiscreta, o cofinita.

(v) Sea  $B \subset A$ . Probar que  $B$  es cerrado respecto de  $\tau_A$  sii es la intersección de  $A$  con un cerrado de  $X$ . La clausura de  $B$  en  $A$  coincide con la clausura de  $B$  en  $X$  intersecada con  $A$ . ¿Y el interior? ¿Y la frontera?

5) Si  $X$  admite una base numerable, entonces existe  $D$  numerable y denso.

6) Sea  $f : X \rightarrow X$  una función continua. ¿Es  $Y = \{x \in X : f(x) = x\}$  un subespacio cerrado?

7) (i) Probar que  $h : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ ,  $h(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ , es un homeomorfismo.

(ii) La bola unidad y el cubo unidad de  $\mathbb{R}^n$  son homeomorfos (con las respectivas topologías inducidas).

8) Sean  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A_n$ , con  $A_n \cap A_{n+1} = \emptyset$ ; y  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f|_{A_n}$  es continua respecto de la topología relativa, para todo  $n$ . Probar que  $f$  es continua.

9) Sea  $(X_i)_{i \in I}$  una familia de espacios topológicos. Sean dados, para cada  $(i, j) \in I \times I$ , un abierto  $U_{ij}$  de  $X_i$  y homeomorfismos  $h_{ij} : U_{ij} \rightarrow U_{ji}$ , tales que

(a)  $U_{ii} = X_i$ ,  $h_{ii} = \text{id}_{X_i}$  para todo  $i \in I$ .

(b) Para todos  $i, j, k \in I$ ,  $h_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$ ; y el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U_{ij} \cap U_{ik} & \xrightarrow{h_{ij}} & U_{ji} \cap U_{jk} \\ & \searrow h_{ik} & \swarrow h_{jk} \\ & & U_{ki} \cap U_{kj} \end{array}$$

Probar que existe un único espacio topológico  $X$  provisto de un cubrimiento abierto  $W_i$ ,  $i \in I$ , y homeomorfismos  $\varphi_i : W_i \rightarrow X_i$ , tales que para todos  $i, j \in I$ ,  $\varphi_i(W_i \cap W_j) = U_{ij}$ ; y el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} W_i \cap W_j & \xrightarrow{\varphi_i} & U_{ij} \\ & \searrow \varphi_j & \swarrow h_{ij} \\ & & U_{ji} \end{array}$$