Representaciones fieles de dimensión mínima de álgebras de Lie de Heisenberg truncadas

Nadina Rojas (FaMAF)

Resumen:

El Teorema de Ado-Iwasawa afirma que toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita sobre un cuerpo k admite una representación fiel, dando origen al problema de calcular

$$\mu(\mathfrak{g}) = \min\{\dim V : (\pi, V) \text{ es una representación fiel de } \mathfrak{g}\}.$$

El invariante $\mu(\mathfrak{g})$, por lo general no es sencillo de obtener para un álgebra de Lie dada. Salvo para un número reducido de álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ se conoce $\mu(\mathfrak{g})$.

En la clase de álgebras de Lie nilpotentes se sabe, por ejemplo que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie filiforme entonces $\mu(\mathfrak{g}) \geq \dim \mathfrak{g}$, si $\mathfrak{g}$ es $\mathbb{Z}$-graduada, entonces $\mu(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{g} + 1$. En general si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente entonces $\mu(\mathfrak{g}) \leq \frac{3}{\sqrt{\dim \mathfrak{g}}} 2^{\dim \mathfrak{g}}$.

En esta charla se expondrán otros resultados y se dará un bosquejo de la prueba del siguiente resultado: Sea $\mathfrak{h}_m$ el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión $2m+1$ y $p \in \mathrm{k}[t]$ no nulo. El álgebra de Lie de Heisenberg truncada asociada es, por definición, $\mathfrak{h}_{m,p} = \mathfrak{h}_m \otimes_{\mathrm{k}} \mathrm{k}[t]/(p)$. Entonces

$$\mu(\mathfrak{h}_{m,p}) = m \deg(p) + \left\lceil 2\sqrt{\deg(p)} \right\rceil .$$

En particular si $p(t) = t$ entonces $\mu(\mathfrak{h}_m) = m + 2$ el cual es bien conocido y más aún $\mu(\oplus_{i=1}^{r} \mathfrak{h}_m) = mr + \lceil 2\sqrt{r} \rceil$.